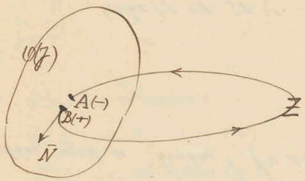
Twierdzenie Ampère'a

1. Dany obwód $\underline{O}$, w nim prąd J, liniowy, trwały

Prowadzimy $\underline{\Sigma}$ przez $\underline{O}$; przyp., że orbita $\underline{Z}$ 1-krotnie spleciona z $\underline{O}$

$\underline{Z}$ ma (+) kierunek krążenia wzgl. $O(J)$

Wybieramy na $\underline{\Sigma}$ strony $\left.\begin{matrix}(-)\\(+)\end{matrix}\right\}$ normalna $\overline{N}$ ze strony (−) na (+) zgodna z $\overline{d\xi}$ w miejscu przecięcia (z $\underline{\Sigma}$)



Wyobraźmy sobie co małą przerwę w orbicie $\underline{Z}$ w miejscu przecięcia (z Σ):

po stronie (−) $\underline{A}$

- - - - - - (+) $\underline{B}$

Założenie (dozwolone): $\overline{H}$ pola jest wszędzie $= -\overline{\nabla\varphi}$, gdzie φ potencjał (1-wartościowy, jak w M-statyce), za wyjątkiem elementu $\underline{AB}$, gdzie w całce $\int_Z s(\overline{H}.\overline{d\xi})$ ma miejsce skok. (Gdyby skoku nie było, całka byłaby $= 0$)

Zatem obchodząc od B do A w sensie (+) po $\underline{Z}$, ale nie zamykając koła

$$\int_B^A s(\overline{H}.\overline{d\xi}) = -\int_B^A s(\overline{\nabla\varphi}.\overline{d\xi})$$

$$= -\int_B^A d\xi . s(\overline{\xi}.\overline{\nabla\varphi}) \quad \left\{ \text{gdzie } \overline{\xi} \text{ jednostkowy styczny} \right.$$

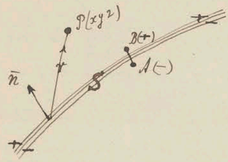
$$= -\int_B^A d\xi . \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$$

$$= -\{\varphi_A - \varphi_B\}$$

$$= \varphi_B - \varphi_A$$

dlatego kładziemy wówczas: $\varphi_B - \varphi_A = 4\pi\kappa J$ $\left\{ \begin{matrix}\text{wobec prawa za-}\\\text{sadn. el-m. pól}\\\text{prąd. trwałych;}\\\kappa = 1 \text{ tutaj}\end{matrix}\right.$

II. Przypominamy sobie potencyał w (P) wywołany, pochodzący od podwójnej warstwy magnetycznej



$$\varphi_{(P)} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{4\pi} \iint_S dS \, \frac{s(\bar{n}\bar{r})}{r^3}$$

gdzie $\bar{n}$ od (−) do (+)

$\bar{r}$ od dS do $P(xyz)$

III. Kładąc zatem $\varphi_B - \varphi_A = 4\pi a J$, mamy w polu magnetycznem prądu $O(J)$

$$\varphi_P = aJ \iint_\Sigma dS \cdot \frac{s(\bar{N}\bar{r})}{r^3}$$

(obecna $\bar{N}$ = dawne $\bar{n}$)
(obecna Σ = dawne S)

można zatem wyobrażać sobie, że pole magn. prądu pochodzi (nie od prądu, lecz) od fikcyjnej warstwy magn. podwójnej, w której istnieje skok potencyału ($\varphi_B - \varphi_A$) przy przejściu z (−) na (+).

Moc tej warstwy $\Psi = aJ$

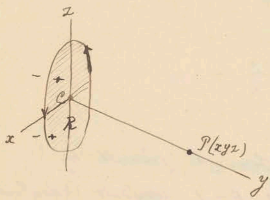
Brzegiem warstwy jest obwód $O(J)$

Położenie warstw magn. (−) i (+) jest takie, żeby $\bar{n}$ lub $\bar{N}$, idąca od (−) na (+) była dodatnio związana z kierunkiem krążenia prądu J w (O).

Kształt Σ jest zresztą dowolny, więc P można brać zawsze poza warstwą Σ

Przykład (zadanie) 1.

Obwód O (J) jest kołem ; P na osi tego koła ; C środek koła



Cx, Cz w płaszcz. koła

Cy ... oś koła

P na Cy : P : $x = 0$

$y = y$

$z = 0$

R promień koła O

Warstwa Ampère'a

$\bar{n}$ tej warstwy $\parallel (+Cy)$

$\bar{J}$ tej warstwy $\parallel (+Cy)$

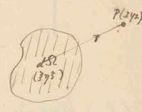
Φ warstwy $= \frac{J.h}{\mu}$ μ warstwy przyp. stała, h grubość --- " ---

$$aJ = \Phi = \frac{J.h}{\mu}$$

$$J = \frac{a\mu J}{h}$$

Potencyał pochodzący od warstwy : { Pomocniczy Lemmat: od ciała dowolnego Ω (elem. $d\xi\, d\eta\, d\zeta$)

$$\varphi = \frac{1}{\mu} \iiint_\Omega d\xi\, d\eta\, d\zeta \; s\left(\bar{J} . \overline{\nabla_{\xi\eta\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)}\right)$$



Jeżeli $\bar{J}$ stałe w Ω

$$\varphi = \frac{1}{\mu} \iiint_\Omega d\Omega \left[J_x \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi} + J_y \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta} + J_z \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta} \right]$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[J_x \iiint_\Omega d\Omega . \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi} + J_y \iiint_\Omega d\Omega . \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta} + J_z \iiint_\Omega d\Omega . \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta} \right]$$

Ale $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$

4/

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{i t. d.}$$

$$\iiint_\Omega d\Omega \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\iiint_\Omega d\Omega \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\iiint_\Omega \frac{d\Omega}{r}$$

$$= -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

gdzie $Q = \iiint_\Omega \frac{d\Omega}{r}$ potencyał Newtonowski "jednostkowy"
t. j. dla $\rho = 1$ wszędzie (idealnie)
w całej Ω (fikcyjnie)

Zatem $$\varphi = -\frac{1}{\mu}\left\{ J_x \frac{\partial Q}{\partial x} + J_y \frac{\partial Q}{\partial y} + J_z \frac{\partial Q}{\partial z} \right\}$$

$$= -\frac{1}{\mu}\, s(\bar{J} . \nabla Q) \quad \text{.....}(\varphi)$$

Wracamy do warstwy. Obliczyć Q od krążka płaskiego
grubości $= h$
promienia $= R$
gęstości $= +1$
w miejscu P
leżącem na osi Cy
C środek krążka



(*) Wypada łatwo, że

$$Q = 2\pi h \left\{ \sqrt{R^2 + y^2} - y \right\}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2\pi h \left\{ \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}} - 1 \right\}$$

Z poprzedniego (φ), skoro tutaj $J_x = 0$
$J_y = J$
$J_z = 0$

$$\varphi = -\frac{J}{\mu}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{(kier. wobec p. 3)}$$

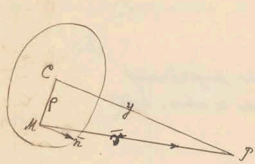
$$= -\frac{aJ}{h}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$= -\frac{aJ}{h}\,2\pi h\left\{\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}} - 1\right\}$$

$$= +\,2\pi aJ\left\{1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}$$

<u>Inny rachunek</u>. Pole magnetyczne prądu J płynącym w obwodzie płaskim, kołowym, o prom. $= R$.

Zasadzamy się na wzorze



$$\varphi = aJ\iint_S dS.\ \frac{s(\bar{n}\bar{r})}{r^3}$$

$\bar{n} \parallel \overline{CP}$ (od C do P)

$\bar{r} = \overline{MP}$ (od M do P)

$CP = y \qquad CM = \rho \qquad MP = r$

$r^2 = y^2 + \rho^2$

$dS = 2\pi\rho\, d\rho$

$s(\bar{n}\bar{r}) = r.\cos(nr) = y$

$$\varphi = aJ\int_0^R \frac{y.\ 2\pi\rho\, d\rho}{(y^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$x^2 = y^2 + \rho^2$

$\rho = 0 \ ..\ x = y$

$\rho = R \ ..\ x = \sqrt{y^2+R^2}$

$$= 2\pi aJ.y\int_y^{\sqrt{y^2+R^2}} \frac{x\,dx}{x^3}$$

$$= 2\pi aJ.y\left\{\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+R^2}}\right\} = 2\pi aJ\left\{1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}$$

Wniosek. Obliczmy siłę $\underline{Y}$ wywieraną przez $O(J)$ w punkcie wywiadowczym $\underline{P}(xyz)$, gdzie $\underline{P}$ leży na osi Cy, jak wyżej

$$Y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$= +2\pi a J \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right\}$$

$$= +2\pi a J \frac{R^2}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

Gdyby $\underline{P}$ leżał w samym środku $\underline{C}$ obwodu $\underline{O}$, wówczas

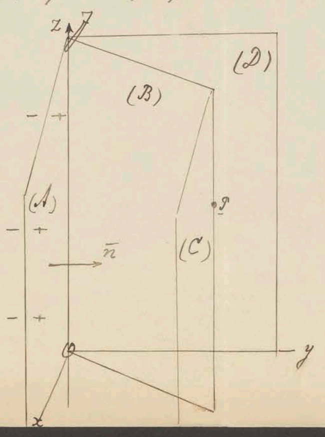
$$y=0$$

zatem

$$(Y)_c = \frac{2\pi a J}{R}$$ wzór przytaczany często w elem. wykł.

Nowe zadanie: przypadek II-gi

Z ogólnego twierdzenia o polu magn. prądów powrócić do prawa Biota i Savarta, o polu magn. prądu prostolinijnego, .. długiego



$\underline{Oz}$: linia prądu J

pł. (A) ≡ xOz

$\underline{P}$ p. wywiadowczy

(B) pł. przez $\underline{Oz}$ i $\underline{P}$

(D) pł. Oyz

(C) pł. przez $\underline{P}$ ∥ pł. (A)

Przyp., że zamykające gałęzi obwodu $O(J)$

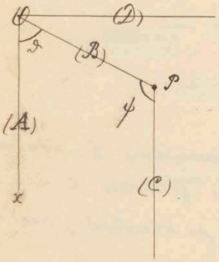
leżą w pł. (A). Podw. warstwa magn. Ampère'a leży zatem w pł. (A). Tworzymy (−) i (+) strony na (A) i prowadzimy normalną $\bar{n}$, która $\parallel Oy$

θ = kąt przestrzenny pom. (B) a (C) zawarty

= pas wycinany przez (B) i (C) na pow. kuli o prom. = 1 zatoczonej dokoła P jako środka

= kąt widzenia całej (A) od $\underline{Oz}$ w stronę $+Ox$ (widzenia z p. $\underline{P}$.)

Mamy więc: patrząc z góry: (w przecięciu poziomem)



$$\theta : 4\pi r^2 = \phi : 2\pi r$$

gdzie mamy zarazem $\underline{r} = 1$

więc $\theta : 4\pi = \phi : 2\pi$

$$\theta = 2\phi$$

Wówczas, jak wiadomo: $\varphi_P = \Phi . \theta$ (Φ moc warstwy)

$$= 2\Phi . \phi$$

$$= 2aJ . \phi$$

Dalej $\phi + \vartheta = 180° = \pi$

więc $\varphi_P = 2aJ(\pi - \vartheta)$

$$= Const. - \vartheta$$

co zgadza się z dawnym wynikiem, wypr. z pr. Biota i Savarta

<u>O superpozycji pól, sprawianych przez pewną liczbę obwodów prądów trwałych : uogólnienie prawa</u>

Mamy O', O'', O''' -------

w których: J', J'', J''' ------ trwałe, liniowe

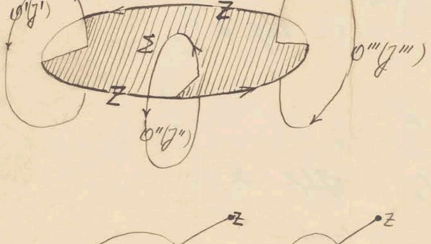
Z ma być: zamknięta
przebiegana w kierunku (+) względem O', O'', O''' ---
1-krotnie spleciona z każdym : O', O'', O''' ---

Zakładamy wówczas:

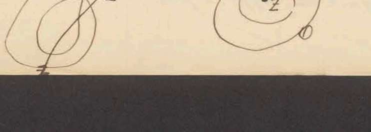
$$\int_Z s(\bar{H} . \bar{dz}) = 4\pi a \,(J' + J'' + J''' + \cdots)$$

$$= 4\pi a \sum_i J_i$$

gdzie $J'\, J''\, J'''$ .. przecinają wszystkie pewną powierzchnię Σ zbudowaną na Z (<u>nie</u> na O', O'', O''' ---). Określenie splecenia i wzajemnej zależności kierunków krążenia (po Z i po obwodach) <u>nie</u> zmienia się przez to.



3 obwody
$O'\, O''\, O'''$
każdy 1-krotnie spleciony z Z (Σ)



Obwody dwu- lub kilka krotnie splecione z Z (Σ)

Możemy policzyć <u>2</u> razy prąd J <u>dwu</u>krotnie spleciony

Dotychczas: pole magnet. prądów twardych liniowych

Uogólniamy:

Założenie: Dziedzina 3 wymiarowa Ω

W każdym $d\Omega$ mamy wektor $\bar{i}$ prądu

(jak w Rozdz. o El-Kinetyce)

Prowadzimy wiązki prądu, jak w owym Rozdz. 

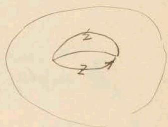
Mamy $J = \iint_\sigma d\sigma \, s(\bar{n}\bar{i})$. gdzie σ przecięcie wiązki

Jeżeli σ nieskończ. małe, poprzeczne: $J = \sigma . i$

($\bar{i}$ wektor, J skalar)

Budujemy w Ω otwartą powierzchnię Σ

Z: Kontur tej Σ



Zakładamy:

$$\int_Z s(\bar{H} d\bar{\xi}) = 4\pi a \iint_\Sigma d\Sigma \, s(\bar{n}\bar{i}) \quad \ldots\ldots (*)$$

$\bar{n}$: normalna do $d\Sigma$, skierowana w sensie (+) do kierunku krążenia po Z

W tem założeniu (*) Z dotyka miejsc, gdzie jest $\bar{i}$ (pobrzeżnych); dawniej Z nie dotykała prądów, lecz je obejmowała. Założenie (*) idzie więc w tym względzie dalej.

Równania A; postać 1sza

Przypuśćmy w Ω punkt $P(x, y, z)$

Przez ten P prowadzimy pewną otw. pow. Σ

dokoła P ...... orbitę Z (kontur Σ)

Według twierdzenia Stokesa:

$$\iint_\Sigma d\Sigma . s(\bar{n} . \mathrm{curl}\, \bar{H}) = \int_Z s(\bar{H} . d\bar{\xi})$$

gdzie $\bar{n}$ poprowadzona (+) względem $d\Sigma$ (resp. Σ)

Przechodzimy do granicy: Σ ściągamy do P

Ponieważ takich Σ i $\bar{n}$ możemy poprowadzić dowolnie wiele

Zatem z dowolnej liczby równań

$$\iint_{\Sigma} d\Sigma \cdot {}_s(\bar{n}\cdot \operatorname{curl} \bar{H}) = 4\pi a \iint_{\Sigma} d\Sigma \cdot {}_s(\bar{n}\bar{i})$$

wyprowadzamy, w granicy:

$$\operatorname{curl} \bar{H} = 4\pi a \bar{i} \quad \ldots\ldots (A')$$

{W zwykłej pisowni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi a i_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi a i_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi a i_z \end{aligned}\right\} \quad (A')$$

}

pierwsza (szczególna) postać pierwszej (A) grupy równań Maxwella fundamentalnych. Ogólniejszą podamy później. Wiążą pole $\bar{H}$ z prądem $\bar{i}$ w danem miejscu pola X, dnia 5/V 1933

Uwagi: 1. pole $\bar{H}$ nie jest statyczne. Gdyby ono było statyczne, mielibyśmy:

$$\bar{H} = -\nabla\varphi(x,y,z)$$

zatem $\operatorname{curl} \bar{H} = -\operatorname{curl}(\nabla\varphi) = 0$

Pole $\bar{H}$ może być statyczne, tylko, gdy $\bar{i} = 0$: więc jakieś obce superponowane ponad el-magn. pole, skądinąd pochodzące, nie od prądu.

II. Prąd $\bar i$ w tych równaniach (A') jest trwały

Istotnie mamy odrazu:

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\bar H) = 4\pi a . \mathrm{div}\,\bar i$$

a zatem $$\mathrm{div}\,\bar i = 0$$

więc prąd jest trwały.

T. zw. potencjał wektoryalny. Dziedzina Ω wypełniona przez prądy $\bar i$ w każdym $d\Omega$. Przypuśćmy, że

(a) wszędzie w Ω stała μ magn. jest ta sama, stała

(b) poza Ω mamy wszędzie $\bar i \equiv 0$.

(c) $\bar i$ są trwałe i wszędzie $\mathrm{div}\,\bar i = 0$. Wiązki $\bar i$ w Ω są zamknięte; krążą po Ω; na zewn. pow. Σ (która ogranicza Ω) mają być styczne, t.j. dotykać tylko $d\Sigma$, więc spełniają: $$S(\bar n \bar i) = 0$$

Przyp. dowolny wektor $\bar A$. Mamy tożsamość:

$$(1) \qquad \mathrm{curl}(\mathrm{curl}\,\bar A) = \nabla(\mathrm{div}\,\bar A) - \{ \bar i_x \nabla^2 A_x + \bar i_y \cdot \nabla^2 A_y + \bar i_z \nabla^2 A_z \}$$

(gdzie $\bar i_x, \bar i_y, \bar i_z$ są 3 jednostk. wektory Hamiltona $\parallel Ox, Oy, Oz$ (nic wspólnego ze składowemi $i_x\ i_y\ i_z$ prądu $\bar i$))

Załóżmy: $$\mathrm{div}\,\bar A = 0$$
$$\mathrm{curl}\,\bar A = \mu \cdot \bar H$$

wówczas z (1)

$$\mu . \mathrm{curl}\,\bar H = -\{ \bar i_x \cdot \nabla^2 A_x + \bar i_y \cdot \nabla^2 A_y + \bar i_z \cdot \nabla^2 A_z \}$$

Przy pomocy równań (A')

$$4\pi a\mu \bar{i} = -\{ \bar{i}_x \cdot \nabla^2 A_x + \bar{i}_y \cdot \nabla^2 A_y + \bar{i}_z \cdot \nabla^2 A_z \}$$

t.j.

$$\left.\begin{aligned} 4\pi a\mu i_x &= -\nabla^2 A_x \\ 4\pi a\mu i_y &= -\nabla^2 A_y \\ 4\pi a\mu i_z &= -\nabla^2 A_z \end{aligned}\right\} (**)$$

równania typu równania Poissona : $4\pi\rho = -\nabla^2\varphi$

Odwracamy zatem $(**)$, w znany sposób:

Ω : $d\Omega(\xi,\eta,\zeta)$ punkt "czynny" lub "bieżący"

$P(x,y,z)$ „wyrazowczy" (wewn. lub zewn. Ω)

$$r = \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}$$

$$\rho = \rho(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\varphi_{(P)} = \iiint_\Omega \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}$$

Kładziemy zatem

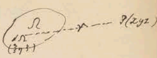
$$\left.\begin{aligned} A_x &= \iiint_\Omega \frac{d\Omega \,.\, a\mu i_x}{r} \\ A_y &= \iiint_\Omega \frac{d\Omega \,.\, a\mu i_y}{r} \\ A_z &= \iiint_\Omega \frac{d\Omega \,.\, a\mu i_z}{r} \end{aligned}\right\}$$

gdzie składowe $i_x\ i_y\ i_z$ prądu $\bar{i}$ płynącego w miejscu (ξ,η,ζ) dziedziny Ω uważamy za funkcje (ξ,η,ζ)

$d\Omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta$

$\bar{A}$ nazywamy: potencjałem wektorowym prądów $\bar{i}$ (w Ω).

Dalsze uwagi nad potencyałem wektorjalnym $\bar{A}$



Mamy jako określenie:

$$d\Omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$i_x = i_x(\xi\eta\zeta)$$
$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

$$(1) \qquad A_x = \iiint_\Omega \frac{d\Omega \,.\, a\mu \,.\, i_x}{r} = A_x(x,y,z)$$

i podobnie dla A_y i A_z.

1. Sprawdźmy, czy (1) czynią zadosyć warunkowi

$$(2) \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \operatorname{div} \bar{A} = 0$$

który a priori dla $\bar{A}$ przyjęliśmy.

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \iiint_\Omega \frac{d\Omega \,.\, a\mu \,.\, i_x}{r}$$

$$= \iiint_\Omega d\Omega \,.\, a\mu \,.\, i_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= - \iiint_\Omega d\Omega \,.\, a\mu \,.\, i_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\operatorname{div} \bar{A} = - a\mu \iiint_\Omega d\Omega \left\{ i_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + i_y \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) + i_z \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \right\}$$

$$= - a\mu \iiint_\Omega d\Omega \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{i_x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{i_y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{i_z}{r}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \underbrace{\left(\frac{\partial i_x}{\partial \xi} + \frac{\partial i_y}{\partial \eta} + \frac{\partial i_z}{\partial \zeta} \right)}_{= \operatorname{div} \bar{i}} \right]$$

$= 0$ z założenia

$$= + a\mu \iint_\Sigma d\Sigma \, \frac{s(\bar{n}\bar{i})}{r} \qquad \Sigma \text{ jest zewn. granicą } \Omega$$

$= 0$ z założenia

11. Mieliśmy : $\mu\bar{H} = \text{curl}\,\bar{A}$ ..... (3)

Czy taka $\mu\bar{H}$ spełnia przyjęte warunki ?

(a) $\text{div}(\mu\bar{H}) = \text{div}(\text{curl}\,\bar{A}) \equiv 0$

(b) $\mu\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = -\nabla^2 A_x$ (skoro $\text{div}\,\bar{A} = 0$)

$= +4\pi a \mu i_x$

powracamy zatem do równań grupy $A^{(1)}$ Maxwella

Energia magnetyczna pola prądu trwałego.

Zakładamy, jak w M-statyce, że, w polu prądu, energia magnetyczna elementu $d\Omega$ wynosi znowu

$$\frac{d\Omega}{8\pi}\mu H^2$$

Ten wzór nie zawiera mas magn., gęstości magn.. } może zatem stosować się tutaj

Dziedzina Ω, w której są prądy $\bar{i}$, ma mieć

(1) .... $W = \frac{1}{8\pi}\iiint_\Omega d\Omega \cdot \mu \cdot H^2$

Można tu całkę rozciągnąć do ∞

Piszemy (1)

(2) $W = \frac{1}{8\pi}\iiint_\infty d\Omega \cdot {}_s(\bar{H} \cdot \text{curl}\,\bar{A})$

Znana tożsamość wektorjalna

$$\text{div}_v(\bar{A}\bar{H}) = {}_s(\bar{H} \cdot \text{curl}\,\bar{A}) - {}_s(\bar{A} \cdot \text{curl}\,\bar{H})$$

pozwala przepisać (2) jak następuje :

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_{\infty} d\Omega \cdot \mathrm{div}_v(\bar{A}\bar{H}) + \frac{1}{8\pi} \iiint_{\infty} d\Omega \cdot s(\bar{A} \cdot \mathrm{curl}\, \bar{H})$$

Pierwszą całkę uważamy za

$$- \mathrm{Lim} \frac{1}{8\pi} \iint_{\Sigma} d\Sigma \; s(\bar{n} \cdot v(\bar{A}\bar{H}))$$

gdy Σ oddala się do ∞. Ta granica $= 0$. Mamy

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_{\infty} d\Omega \cdot s(\bar{A} \cdot \mathrm{curl}\, \bar{H}) \qquad \ldots.(3)$$

Lecz $\mathrm{curl}\, \bar{H} = 4\pi a \bar{i}$ więc

$$W = \tfrac{1}{2} a \iiint_{\infty} d\Omega \cdot s(\bar{A}\bar{i}) \qquad \ldots.(4)$$

gdzie możemy w granicach całki znów wrócić do Ω; poza Ω niema $\bar{i}$.

<u>Energia magnetyczna "wzajemna"</u>. Przypuśćmy dwa układy prądów: $\Omega'(\bar{i}')$ oraz $\Omega''(\bar{i}'')$.

W punkcie (x,y,z) $\Omega'(\bar{i}')$ sprawia $\bar{H}_1$
$\Omega''(\bar{i}'')$ sprawia $\bar{H}_2$

T. zw. "wzajemna" energia (Ω') — (Ω'') jest

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\infty} d\Omega\, \mu\, s(\bar{H}_1 \bar{H}_2) \qquad \ldots.(1)$$

$\mu \bar{H}_1 = \mathrm{curl}\, A_1$ więc

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\infty} d\Omega \cdot s(\mathrm{curl}\, \bar{A}_1 \cdot \bar{H}_2)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\infty} d\Omega \cdot s(\bar{A}_1 \cdot \mathrm{curl}\, \bar{H}_2)$$ + całka powierzchowna, którą możemy, jak wyżej, opuścić.

$$= a \iiint_{\infty} d\Omega \cdot s(\bar{A}_1 \cdot \bar{i}'')$$

albo $$U = a \iiint_{\Omega''} d\Omega'' \cdot {}_s(\bar{A}_1 \cdot \bar{i}'') \quad \text{- - - - (2)}$$

$\bar{A}_1$ utworzony we wszystkich $d\Omega''$
wywołany przez $\Omega'(\bar{i}')$ jak widać z $\mu\bar{H}_1 = \text{curl}\,\bar{A}_1$

Obwody, prądów, linjowe. Przypuśćmy, że Ω' i Ω'' są to obwody O', O'' w których płyną J', J''. Mamy (jak wiadomo)

$$J'' \cdot \overline{dO''} = \bar{i}'' \cdot d\Omega''$$

więc energia wzajemna (2) przybiera postać

$$U = a \int_{O''} {}_s(\bar{A}_1 \cdot J'' \cdot \overline{dO''})$$

$$= a J'' \int_{O''} {}_s(\bar{A}_1 \cdot \overline{dO''}) \quad \text{- - - - - (3)}$$

A'' utworzony w kolejnych dO''
pochodzi od działania $O'(J')$

Według twierdzenia Stokesa, z (3), jeżeli S'' zbudowana na O''

$$U = a J'' \iint_{S''} dS'' {}_s(\bar{n} \cdot \text{curl}\,\bar{A}_1)$$

$$= a J'' \iint_{S''} dS'' \cdot {}_s(\bar{n} \cdot \mu\bar{H}_1)$$

$$= a J'' Q_1'' \quad (4)$$ gdzie Q_1'' strumień indukcyi magn., przez S'' (zbudowanej na O'') ale pochodzący od działania $O'(J')$

Zupełnie podobnie otrzymalibyśmy przeciwnie

$$U = a J' Q_{11}' \quad (5)\left\{ \begin{array}{l} Q_{11}' \text{ przez } S' \\ \text{od } O''(J'') \end{array} \right.$$

Mamy zatem: $aJ''Q_1'' = aJ'Q_{11}'$

$$J''Q_1'' = J'Q_{11}' \quad \ldots\ldots (6)$$

Piszemy, jak dawniej: $Q_1'' = aJ'q_1''$, $Q_{11}' = aJ''q_{11}'$ } (7) gdzie q są (w ocz. wiśtem znaczeniu) strumienie jednostkowe

Wówczas, z (4) i (5)

$$U = aJ''.aJ'q_1'' = aJ'.aJ''.q_{11}'$$

$$= a^2J'J''q_1'' = a^2J'J''q_{11}' \quad \ldots\ldots (8)$$

Skąd widać, że: $q_1'' = q_{11}'$ .... (9).

Załóżmy, jako definicję:

$$p_{12} = a^2q_1'' = a^2q_{11}' \quad \ldots\ldots (10)$$

Mamy wówczas: $U = p_{12}J'J''$ ...... (11)

Nazywamy p_{12}: spółczynnikiem indukcji wzajemnej O' i O'' układu. Jest niezależny od J' i od J''; zależny od μ i od geometryi układu.

{ Zadanie: wykazać, że

$$p_{12} = a^2\mu\int_{O'}\int_{O''}\frac{s(\overline{dO'}.\overline{dO''})}{r_{12}}$$

gdzie r_{12} jest (skalarnie rozumiana) odległość (dO') ---- (dO'') }

Energia magnetyczna całkowita układu dwóch obwodów będzie:

$$W = W' + W'' + U_{1,11} \quad \ldots\ldots (1)$$

gdzie W' jest en. magn. własna obwodu $O'(J')$

W'' en. magnet. własna obwodu $O''(J'')$

$U_{1,11}$ en. wzajemna obwodów O' i O'' jak wyżej.

Można rozumieć np. W' jako "wzajemną" obwodu O' względem samego siebie; zatem piszemy

$$W' = \tfrac{1}{2} p_{11} J'^2$$

{ dodatkowy $\frac{1}{2}$ dla dogodności (2)

podobnie:
$$W'' = \tfrac{1}{2} p_{22} J''^2$$
{ podobnie

{ Istotnie: $W' = \frac{1}{2} a \int_{O'} s(\overline{J'}.\overline{A'}.d\overline{O'})$; ten wzór otrzymamy z (4) p. 15, ograniczając całkę do Ω' i pisząc $d\Omega'.\overline{i} = J'.d\overline{O'}$

Zatem
$$W' = \tfrac{1}{2} a J' \int_{O'} s(\overline{A'}.d\overline{O'})$$

$\overline{A'}$ utworzony w kolejnych $d\overline{O'}$ pochodzi od J' w całym O'. Mamy zatem, jak poprzednio (p. 16)

$$W' = \tfrac{1}{2} a J' Q'_1 \quad \text{- - - -} \quad (3)$$

Q'_1 przez S' (zbudowaną na O') od O' (samego siebie)

Piszę znowu
$$Q'_1 = a J' q'_1 \quad \text{- - - -} \quad (4)$$

otrzymamy: z (3):
$$W' = \tfrac{1}{2} a^2 q'_1 J'^2$$
$$= \tfrac{1}{2} p_{11} J'^2$$

gdzie $p_{11} = a^2 q'_1$ już nie zależy od J' }

Powracając do (1) u dołu p. 17

$$W = \frac{1}{2} p_{11} J'^2 + p_{12} J' J'' + \frac{1}{2} p_{22} J''^2$$

p_{11}, p_{22} spółczynniki indukcyi własnej (auto-indukcyi) O', O''

p_{12} spółczynnik indukcyi wzajemnej O' i O'' względem siebie

są zależne od μ i od geometr. konformacyi układu

{ W układzie n obwodów

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{kj} J_k J_j$$

przyczem $p_{kj} \equiv p_{jk}$; z tem zastrzeżeniem W jest ogólną formą kwadratową prądów $J_k \cdot J_j$ }

Rozdział VI: O zjawiskach indukcyi

Faraday 1831: gdy obwód O' (metaliczny, jednolity, jednorodny, w którym, w stanie spoczynku, niema prądu) porusza się względem linij pola obcego magnesu M'', lub względem pola obcego prądu J'' w obwodzie O'', – w tym O budzi się prąd przemijający, t. zw. indukowany, który znika, skoro ruch ustaje.

Ruch O' względem pola M''.

Przypominamy z Rozdz. III., że, gdy w obwodzie O, gdzie opór R, gdzie całkowita siła el-motoryczna X, płynie prąd J, wówczas, w jednostce czasu, na przyrost energii el-ej idzie praca $= +JX$

na ciepło Joule'a idzie strata $= RJ^2$

Jeżeli O nieruchomy, bez indukcyi, mamy

$$RJ^2 = JX \qquad \text{t. j. } RJ = X \quad \text{albo}$$

$$\frac{d}{dt} W^{(e)} = JX - RJ^2 = 0\,; \quad W^{(e)} = \text{const. w czasie}$$

Przypuśćmy O' oraz M''. Bez ruchu względnego, poprzednie prawa pozostają w mocy. Przypuśćmy teraz ruch względny O' względem M'' (lub M'' względem O'); pojawia się J' w O'.

Zakładamy: że ciepło Joule'a, w 1ce czasu, wynosi znowu: $R'J'^2$

że praca w obwodzie, w 1ce czasu, wynosi znowu: $-J'X'$

że energia elektryczna układu nie zmienia się

że praca $J'X'$ zużywa się nietylko na ciepło Joule'a ale również na pracę, wprost mechaniczną, związaną z ruchem

że ta praca "mechaniczna" wynosi, w 1ce czasu: $aJ'\frac{dQ'_{''}}{dt}$

gdzie $Q'_{''}$ jest strumień magn. ind. przez $\underline{S}'$ zbudowaną na $\underline{O}'$ a pochodzący od $\underline{M}''$

Mamy zatem

$$(1) \ldots\ldots \quad J'X' = R'J'^2 + aJ'\frac{dQ'_{''}}{dt}$$

$$(2) \ldots\ldots \quad R'J' = X' - a\frac{dQ'_{''}}{dt}$$

uogólniona postać prawa Ohma (Helmholtz, Kelvin 1848). Dodatkowy wyraz $-a\frac{dQ'_{''}}{dt}$ nazywamy „elektromotoryczną siłą indukcyi".

Inna postać twierdzenia. W rozdziale o prądzie J w obwodzie O, przypuszczając wektor $\overline{E}$ w elemencie $\overline{dl}$ obwodu, mieliśmy związek

$$(3) \ldots\ldots \quad RJ - X = \int_O s(\overline{E}.\overline{dl})$$

a zatem (2) można wyrazić: (opuszczając akcenty)

$$(4) \quad \int_O s(\overline{E}.\overline{dl}) = -a\frac{dQ}{dt}$$

gdzie niema już $\underline{R}$ ani $\underline{J}$ ani X. (To (4) okaże się ważne w d. ciągu)

Wszystkie wywody powyższe tyczyły się prądów trwałych, kiedy nic, ani $\bar{I}$, ani J, nie zależy od czasu.

Obecnie wchodzi wyraz $-a\frac{dQ}{dt}$, wogóle mówiąc zależny od czasu. Mamy więc teraz $J=J(t)$; ale J musi być jeden, jednakowy, w całym obwodzie $\underline{O}$. Powiadamy „prąd quasi-trwały".

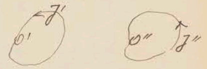
Uogólnienie. Bez względu na pochodzenie pola magnet. $\bar{H}$
bez względu na to, dlaczego to pole zmienia się z $\underline{t}$
(a zatem i Q zmienia się z czasem)

mamy zawsze $\quad R'J'_{ind.} = -a\frac{dQ'}{dt} \quad$ w $O'(S')$

Pole $\bar{H}$ może np. pochodzić od obcego M''
- - - - - - od obcego (innego) O'' w którym inny J''
- - - - - - nawet od samego O' w którym J' (indukcja własna)

Zmiana Q' może wyniknąć np. z ruchu O' względ. pola
z ruchu pola wzgl. O'
ze zmian μ (np. zbliżamy żelazo)
ze zmian wartości J'' lub J'
z deformacji O' lub O'' itd. itd.

Dwa obwody, powiedzmy:



$$O' \quad J' \quad R' \quad X'$$
$$O'' \quad J'' \quad R'' \quad X''$$

Całkowity przepływ przez $S'(O')$, powiedzmy Q', jest

$$Q' = Q'_1 + Q'_{11}$$
$$\left(\begin{smallmatrix}\text{od } O'\\ \text{samego}\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}\text{od } O''\\ \text{tamtego}\end{smallmatrix}\right)$$

$$= aJ'q'_1 + aJ''q'_{11}$$

$$= \frac{1}{a}\{p_{11}J' + p_{12}J''\}$$

Mamy zatem

$$(1,1) \;\ldots\; aQ' = p_{11} J' + p_{12} J'' \qquad ; \text{ i podobnie}$$

$$(1,2) \;\ldots\; aQ'' = p_{12} J' + p_{22} J''$$

Energia magnetyczna układu

$$(2) \qquad W^{(m)} = \tfrac{1}{2} p_{11} J'^2 + p_{12} J' J'' + \tfrac{1}{2} p_{22} J''^2$$

Hypotetycznie, domyślnie, przypuszczamy, że praca sił, czynnych między obwodami, lub między elementami (deformujących się) obwodów, wynosi w czasie dt, na wzór poprzedni

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2} J'^2 \frac{dp_{11}}{dt} dt + J' J'' \frac{dp_{12}}{dt} dt + \tfrac{1}{2} J''^2 \frac{dp_{22}}{dt} dt$$

i tę pracę zbieramy jako mechaniczną

W czasie dt mamy straty energii (przypuszczamy to)

$$(4) \begin{cases} \text{w } O' \;\ldots\; R' J'^2 dt \\ \text{w } O'' \;\ldots\; R'' J''^2 dt \end{cases}$$

W tym samym czasie mamy zyski energii zzewnątrz

$$(5) \begin{cases} \text{w } O' \;\ldots\; J' X' dt \\ \text{w } O'' \;\ldots\; J'' X'' dt \end{cases}$$

Zbierając (1), (2), (3), (4), (5):

$$(6) \; dt \left\{ R' J'^2 + R'' J''^2 - J' X' - J'' X'' \right\} +$$

$$+ dt \left\{ \tfrac{1}{2} J'^2 \frac{dp_{11}}{dt} + J' J'' \frac{dp_{12}}{dt} + \tfrac{1}{2} J''^2 \frac{dp_{22}}{dt} \right\} =$$

$$= - dt \frac{d}{dt} \left\{ \tfrac{1}{2} p_{11} J'^2 + p_{12} J' J'' + \tfrac{1}{2} p_{22} J''^2 \right\} = - \frac{dW^{(m)}}{dt} dt$$

Zakładamy tu jeszcze milcząco, że energia elektryczna nie uczestniczy

w zjawisku; dla wiązek liniowych prądu jest to założenie bardzo bliskie prawdy.

Aby sprawdzić (6), przypuszczamy prawa Faraday - Helmh. - Kelvin

(7)
$$R'J' - X' = -a\frac{dQ'}{dt}$$
$$R''J'' - X'' = -a\frac{dQ''}{dt}$$

więc z (1):

(8)
$$R'J' - X' = -\frac{d}{dt}(p_{11}J' + p_{12}J'')$$
$$R''J'' - X'' = -\frac{d}{dt}(p_{12}J' + p_{22}J'')$$

Zatem lewa strona równania (6) wynosi

$$= -\left\{ J'\frac{d}{dt}(p_{11}J' + p_{12}J'') + J''\frac{d}{dt}(p_{12}J' + p_{22}J'') \right\}$$
$$+ dt\left\{ \tfrac{1}{2}J'^2\frac{dp_{11}}{dt} + J'J''\frac{dp_{12}}{dt} + \tfrac{1}{2}J''^2\frac{dp_{22}}{dt} \right\}$$

$$= dt\left\{ -J'^2\frac{dp_{11}}{dt} - J'p_{11}\frac{dJ'}{dt} + \tfrac{1}{2}J'^2\frac{dp_{11}}{dt} \right.$$
$$- J''^2\frac{dp_{22}}{dt} - J''p_{22}\frac{dJ''}{dt} + \tfrac{1}{2}J''^2\frac{dp_{22}}{dt}$$
$$\left. - J'J''\frac{dp_{12}}{dt} - J'p_{12}\frac{dJ''}{dt} - J''J'\frac{dp_{12}}{dt} - J''p_{12}\frac{dJ'}{dt} + J'J''\frac{dp_{12}}{dt} \right\}$$

$$= dt\left\{ -\tfrac{1}{2}J'^2\frac{dp_{11}}{dt} - p_{11}J'\frac{dJ'}{dt} \right.$$
$$- \tfrac{1}{2}J''^2\frac{dp_{22}}{dt} - p_{22}J''\frac{dJ''}{dt}$$
$$\left. - J'J''\frac{dp_{12}}{dt} - p_{12}\left[J'\frac{dJ''}{dt} + J''\frac{dJ'}{dt}\right] \right\}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\{ \tfrac{1}{2}p_{11}J'^2 + \tfrac{1}{2}p_{22}J''^2 + p_{12}J'J'' \right\} dt = -\frac{dW^{(m)}}{dt}\,dt$$

Równanie (6) jest więc sprawdzone
Założenia przyjęte czynią zadość zasadzie zachowania energji

Przypadek szczególny: jeden obwód.

Przypuśćmy $\underline{O}$: nieruchomy względem otoczenia
sztywny, nie ulegający deformacji

Jeżeli zmieniamy (w dowolny sposób) J, zmienia się pole własne magnetyczne i mamy zjawisko auto-indukcji

Mamy:

$$RJ - X = -a\frac{dQ}{dt} \quad \ldots (1)$$

i tutaj, oznaczenia jasne

$$Q = aJq$$
$$= \frac{1}{a}J \cdot p \quad \ldots (2)$$

$\underline{p}$ współczynnik indukcji własnej O; co pisaliśmy np. p_{11} dla O'
$\underline{p}$ obecnie nie jest zmienną, zależy tylko od natury obwodu

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{a}p\frac{dJ}{dt} \quad \text{więc z (1) mamy:}$$

$$(*) \ldots \quad p\frac{dJ}{dt} + RJ = X$$

klasyczne równanie zjawiska indukcji własnej
(*) może dawać wyniki rozmaite,
zależnie od założeń
(od warunków zjawiska)
np.

Indukcya własna w obwodzie $\underline{O}$

Równanie zasadnicze : $$p\frac{dJ}{dt} + RJ = X \quad \ldots (1)$$

1. Przypuśćmy, że $X = const.$

Kładąc $$RJ - X = K \quad \ldots\ldots (2)$$

z (1) : $$\frac{p}{R}\cdot\frac{dK}{dt} + K = 0$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{K}{\left(\frac{p}{R}\right)} = -\frac{K}{\vartheta} \quad \ldots (3)$$

Jeżeli $\vartheta = \frac{p}{R}$ ... (4) : $\underline{\vartheta}$ musi oznaczać pewien okres czasu : por (3)

Całkując (3) $$K = K_0 \cdot \varepsilon^{-t/\vartheta}$$

(2) : $$RJ - X = (RJ_0 - X)\varepsilon^{-t/\vartheta} \quad \ldots (5)$$

gdzie $J_0 = J(t=0)$.

(a) Przypuśćmy, że zamknęliśmy obwód $\underline{O}$ w chwili $t=0$
W tej chwili nie było w $\underline{O}$ prądu : $J_0 = 0$

$$RJ - X = -X\varepsilon^{-t/\vartheta}$$

$$RJ = X(1 - \varepsilon^{-t/\vartheta}) \quad \ldots (6)$$

Dla $t=0$ mamy $RJ = 0$
Dopiero dla $t=\infty$ mamy $RJ_\infty = X$: prąd dochodzi do swej Ohmowskiej wartości, dopiero po $t=\infty$

(b) W chwili $t=0$ płynął prąd J_0 jakiś (dowolny) ; w tej chwili wyłączamy nagle ogniwo z $\underline{O}$; zatem $X=0$ i nadal jest $=0$. Mamy wówczas z (5) :

$$J = J_0\,\varepsilon^{-t/\vartheta}$$

Po czasie $t=\infty$, prąd J spada do zera
jak tego żąda prawo Ohma

O wymiarach stosunku $\vartheta = \frac{p}{R}$. Wniosek.

Spółczynnik p (dawniej p_{11}) ma takie same wymiary jak p_{12}

Mieliśmy

$$p_{12} = a^2\mu \int_{O'}\int_{O''} \frac{s(\overline{dO'}.\overline{dO''})}{r}$$

a zatem spółczynniki indukcji są:

$$[p] = [a^2\mu].L \qquad ---(1)$$

gdzie L wymiar długości.

Opór R wiązki prądu wynosi

$$R = \int_O \frac{dO.}{\sigma.\lambda}$$

gdzie σ = poprzeczne przecięcie jest L^2 ; więc

$$[R] = \frac{L^{-1}}{[\lambda]} \quad \cdots(2)$$ λ przewodnictwo właściwe (prawo Ohma)

Czas zluźniania elektrycznego w przewodniku był

$$T = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}$$ gdzie ε stała dielektryczna

więc $\frac{1}{\lambda} = \frac{4\pi T}{\varepsilon}$ więc z (2)

$$[R] = \frac{1}{[\varepsilon]} L^{-1} T^{+1} \quad (3)$$ gdzie T wymiar czasu

Podzielmy (1) i (3)

$$[\vartheta] = \left[\frac{p}{R}\right]$$

$$= \frac{[a^2\mu].L}{\frac{1}{[\varepsilon]} L^{-1} T^{+1}} = [a^2\mu\varepsilon].\,L^2 T^{-1}$$

Ponieważ ϑ musi być wymiarów czasu (str. 25), zatem

$$[a^2\mu\varepsilon]\, L^2 T^{-1} = T^{+1}$$

$$[a^2\mu\varepsilon] = L^{-2} T^{+2}$$

Iloczyn $a^2\mu\varepsilon$ musi mieć wymiary: odwrotności kwadratu prędkości. Ważna uwaga, na którą powołamy się później.

Uwagi energetyczne o przebiegu zjawisk indukcji własnej.

Przypadek (1)(a) p. 25 : $X = const.$
$J_0 = 0$

Całkowity wydatek energii na ciepło Joule'a w obwodzie $\underline{O}$ wynosi:

$$\int_0^\infty RJ^2 \cdot dt \qquad \left\{ \begin{array}{l} od\ t=0 \\ do\ t=\infty \end{array} \right.$$

Całkowity przyrost energii pochodzący z pracy w ogniwie

$$\int_0^\infty JX\, dt$$

Otóż:

$$\int_0^\infty RJ^2 \cdot dt - \int_0^\infty JX\, dt = \int_0^\infty (RJ - X) \cdot J \cdot dt$$

według (1) p. 25 } $$= -\int_0^\infty p \frac{dJ}{dt} \cdot J \cdot dt$$

($\underline{p}$ nie zal. od $\underline{t}$) $$= -\int_0^\infty pJ\, dJ$$

$$= -\Big|_0^\infty \tfrac{1}{2} pJ^2$$

(skoro $J_0 = 0$) $$= -\tfrac{1}{2} p J_\infty^2$$

$\frac{1}{2}pJ^2$ jest magnetyczna energia (własna) prądu J

a zatem : praca wykonywana w ogniwie (przez X) idzie na dwa

cele, na dwa wydatki :

praca (X) = wydatkowi na ciepło Joule'a +
+ nagromadzeniu energii magnetycznej $\frac{1}{2}p J_\infty^2$

Gdyby prąd był trwały, Ohmowski, drugiego wyrazu nie byłoby wcale
To nam jasno tłumaczy istotę zjawisk indukcji

Przypadek (1)(b) p.25 : $X = 0$ stale
J_0 dowolny

Pracy siły el-mot. X niema wcale ; ogniwo wyłączone

$$\int_0^\infty RJ^2 . dt = -\int_0^\infty J . p\frac{dJ}{dt} . dt$$
$$= -p\int_0^\infty J . dJ \qquad (J_\infty = 0 \text{ obecnie})$$
$$= +\frac{1}{2}pJ_0^2$$

Cała energia magnetyczna początkowa prądu $\frac{1}{2}pJ_0^2$ (w $t=0$) wyczerpuje się w tym przypadku na ciepło Joule'a. Kiedy cały zapas energii $\frac{1}{2}pJ_0^2$ się wyczerpie, zjawisko się kończy; istotą prądu jest właśnie dyssypacya tej energii, nieodwracalne jej rozproszenie, zamiana na ciepło.

Nowy przypadek indukcyi własnej.

Przypuśćmy, że siła el-mot.- X jest zmienna według praw zmienności harmonicznej prostej

$$X = A\varepsilon^{int}$$

A : amplituda zmienności X (rzeczywista, stała)
n : częstość (t.zw. kołowa) (- - - - - -)
$i = \sqrt{-1}$

Równanie (1) p. 25, zasadnicze w zjawisku, daje

$$p\frac{dJ}{dt} + RJ = A\varepsilon^{int} \qquad \text{- - - - (1)}$$

Równanie "zredukowane" : $p\frac{dJ}{dt} + RJ = 0$ - - - (2)

a) Piszę $f(x) = px + R$ - - - - (3)

mamy $f(x) = 0$

$x = -\frac{R}{p}$

$J = C\varepsilon^{-\frac{R}{p}t}$

} dla $X = 0$ "drganie swobodne" które dodaje się zawsze superponuje się na wymuszone

b) Drganie "wymuszone". Jeżeli tylko $\underline{in}$ nie jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, wówczas w drganiu wymuszonem

$$J = \frac{A\varepsilon^{int}}{f(in)}$$

$$= \frac{A\varepsilon^{int}}{R + inp}$$

$$= \frac{(R - inp)A\varepsilon^{int}}{(R - inp)(R + inp)}$$

$$= \frac{(R - inp).\,A\varepsilon^{int}}{R^2 + n^2p^2}$$

Załóżmy:

$$(R - inp)\,A\varepsilon^{int} = B\cdot\varepsilon^{i(nt+\beta)}$$

Mówimy, że między zmiennością J a zmiennością X (w czasie) zachodzi "różnica fazy" $= \beta$.

$$(R - \underline{i}np) A \varepsilon^{int} = B . \varepsilon^{int} . \varepsilon^{i\beta}$$

$$(R - \underline{i}np) A = B(\cos\beta + \underline{i} . \sin\beta)$$

$$R A = B . \cos\beta$$

$$- np . A = B . \sin\beta$$

$\tan\beta = -\frac{np}{R} = -n\vartheta$ (gdzie $\underline{\vartheta}$ dany przez (4). p. 25)

$(R^2 + n^2p^2) A^2 = B^2$ więc

$$B = A\sqrt{R^2 + n^2p^2}$$

Powracamy do J

$$J = \frac{B \varepsilon^{int} \varepsilon^{i\beta}}{R^2 + n^2p^2} = \frac{A\sqrt{R^2+n^2p^2} . \varepsilon^{int} . \varepsilon^{i.\beta}}{R^2 + n^2p^2}$$

$$= \frac{A . \varepsilon^{int}}{\sqrt{R^2 + n^2p^2}} \varepsilon^{i.\beta}$$

$$= \frac{X \varepsilon^{i\beta}}{\sqrt{R^2 + n^2p^2}}$$

Ignorując zjawisko indukcyi, mielibyśmy:

$$X = A \varepsilon^{int}$$

$RJ = X$; zatem $J = \frac{A}{R} \varepsilon^{int}$

amplituda prądu byłaby $\frac{A}{R}$

częstość . . . . n

różnica fazy . . . . . . $= 0$

Uwzględniając indukcję, mamy

$$X = A\varepsilon^{int}$$

$$J = \frac{A}{\sqrt{R^2+n^2p^2}}\,\varepsilon^{i(nt+\beta)}$$

amplituda prądu jest teraz $= \dfrac{A}{\sqrt{R^2+n^2p^2}}$

częstość pozostaje $= n$

różnica fazy wynosi β, gdzie $\tan\beta = -\dfrac{np}{R}$

Heaviside nazwał przeto $\sqrt{R^2+n^2p^2}$ "impedancyą" (czyli zdolnością przeszkadzania); gra teraz rolę poprzednio graną przez R.

$$\text{Impedancya} = \sqrt{R^2+n^2p^2}$$

$$= R\sqrt{1+\tan^2\beta}$$

$$= \frac{R}{\cos\beta}$$

Zadanie: obliczyć ciepło Joule'a wydzielone w obwodzie w przeciągu k okresów τ, gdzie $\tau = \dfrac{2\pi}{n}$

Ciepło to wypada

$$= \frac{1}{2}\,\frac{A^2}{\sqrt{R^2+n^2p^2}}\,k\tau\cdot\cos\beta$$

Czyniąc β możliwie bliskiem $\frac{1}{2}\pi$ (R możliwie małym) czynimy ciepło Joule'a małem.

wyt. pegtol 12/V 33

Zjawisko indukcyi w dwóch obwodach

Przypuśćmy obwody O′ i O″ (sztywne; deformować się nie mogą)
Spółczynniki indukcyi p_{11}, p_{12}, p_{22} nie zależą od t
Prądy, w chwili t : $J' = J'(t)$; $J'' = J''(t)$
Strumienie indukcyi:

$$aQ' = p_{11} J' + p_{12} J''$$
$$aQ'' = p_{12} J' + p_{22} J''$$

Zasadnicze prawa indukcyi (Faraday - Helmholtz - Kelvin) dają

$$p_{11} \frac{dJ'}{dt} + p_{12} \frac{dJ''}{dt} + R'J' = X'$$
$$p_{12} \frac{dJ'}{dt} + p_{22} \frac{dJ''}{dt} + R''J'' = X''$$

(gdzie oznaczenia są oczywiste).

O całkowaniu takich układów uczy Teorja Równ. Różn. zupełnych

Przypadek 1. Przypuśćmy: $X' = \text{const}$
$X'' = \text{const}.$

Całki, jak wiadomo z T. R. R., są

$$R'J' - X' = A' \varepsilon^{-\alpha t} + B' \varepsilon^{-\beta t}$$
$$R''J'' - X'' = A'' \varepsilon^{-\alpha t} + B'' \varepsilon^{-\beta t}$$

{ Bierzemy za zmienne:

$$x_1 = R'J' - X'$$
$$x_2 = R''J'' - X''$$

Wstawiamy za x_1, x_2 : $C_1 \varepsilon^{\gamma t}$, $C_2 \varepsilon^{\gamma t}$

Otrzymujemy dwa równania zawierające: γ, C_1, C_2

Z tych otrzymujemy równanie kwadratowe dla γ i spółczynniki zależą

od : $R', R'', p_{11}, p_{12}, p_{22}$

To równanie daje dwa rozwiązania (obadwa ujemne) γ_1, γ_2

Kładąc $\gamma_1 = -\alpha \qquad \gamma_2 = -\beta$

otrzymujemy powyższe wzory }

Przypadek szczególny : $X'' = 0$

Mówimy : J' prąd pierwotny

J'' ... wtórny

Gdy zamykamy i znów otwieramy O', mamy w O'' prąd J''

Schemat induktora, cewki indukcyjnej itp

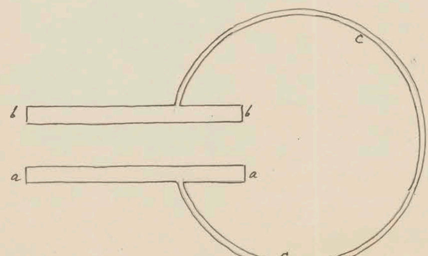
Przypadek II. Jeżeli $X' = A \sin nt$

$X'' = 0$

mamy wówczas schemat t. zw. transformatora

Kelvina teorya wyładowywania się kondensatora

Mówiliśmy dotychczas o zjawiskach indukcyi w obwodach ściśle zamkniętych. Lord Kelvin (1855) poszedł po raz pierwszy dalej i wskazał drogę ogromnego, świetnego uogólnienia.



Kondensator płaski : aa, bb

1.) W równowadze el-stat. :

aa : potencyał φ_a
ładunek Q_a

bb : potencyał φ_b
ładunek Q_b

W przypadku równowagi:

$$Q_a = K(\varphi_a - \varphi_b)$$
$$Q_b = K(\varphi_b - \varphi_a)$$

$\underline{K}$ pojemność el-stat. kond.

Energia el-statyczna: $W^{(e)} = \frac{1}{2} K (\varphi_a - \varphi_b)^2$

Pisząc $|\varphi_a - \varphi_b| = \varphi$ $\quad |Q_a| = |Q_b| = Q$

mamy zatem
$$Q = K\varphi$$
$$W^{(e)} = \frac{1}{2} K \varphi^2$$

2) Gdy połączyliśmy <u>aa</u> i <u>bb</u> przez <u>cc</u>, mamy prąd

$$J = -\frac{dQ}{dt} = -K\frac{d\varphi}{dt} > 0$$

3) Ciepło Joule'a, w czasie dt: $RJ^2\,dt$

W <u>ccc</u> niema ogniw itp., więc $X = 0$

Obwód <u>ccc</u> nie porusza się, nie deformuje się

4) Przypuśćmy znowu, że energia magnet. własna prądu J jest

$$W^{(m)} = \frac{1}{2} p J^2$$

Jednak pojęcie $\underline{p}$ nie jest jasne, gdyż obwód <u>nie</u> jest zamknięty? Jeżeli odstęp płyt <u>aa</u>, <u>bb</u> jest mały, $\underline{p}$ jest (w 1. przybliżeniu) = współcz. ind. obwodu <u>ccc</u> dopełnionego dowolnie do całości.

<u>Zasada zachowania energii</u>:

$$RJ^2\,dt = -\frac{d}{dt}\left(W^{(m)} + W^{(e)}\right)dt$$

Dawniej zaniedbywaliśmy $\frac{d}{dt}W^{(e)}$; tutaj widocznie nie można.

$$RJ^2\,dt = -\left(pJ\frac{dJ}{dt} + K\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)dt$$

$$pJ\frac{dJ}{dt} + K\varphi\frac{d\varphi}{dt} + RJ^2 = 0$$

a) Ale $J = -K\frac{d\varphi}{dt}$ więc

$$pJ\frac{dJ}{dt} - \varphi J + RJ^2 = 0$$

$$p\frac{dJ}{dt} - \varphi + RJ = 0$$

b) $\frac{d}{dt}$ →

$$p\frac{d^2J}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} + R\frac{dJ}{dt} = 0$$

c) K →

$$pK\frac{d^2J}{dt^2} - K\frac{d\varphi}{dt} + RK\frac{dJ}{dt} = 0$$

d) $J = -K\frac{d\varphi}{dt}$ →

$$pK\frac{d^2J}{dt^2} + RK\frac{dJ}{dt} + J = 0 \qquad \text{---------}(*)$$

klasyczne równanie wyładowań w kondensatorze, podane przez Kelvina

Załóżmy:

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{pK} - \frac{R^2}{4p^2} \\ b = \frac{R}{2p} \end{cases}$$

Mamy z równ. Kelvina:

$$\frac{d^2J}{dt^2} + 2b\frac{dJ}{dt} + (a^2+b^2)J = 0 \qquad \text{----}(**)$$

Jak wiadomo, rozwiązanie jest

$$J = C_1\varepsilon^{k_1t} + C_2\varepsilon^{k_2t}$$

k_1, k_2 są pierwiastkami równania

$$k^2 + 2bk + a^2 + b^2 = 0$$

$$k = -b \pm \sqrt{b^2 - (a^2+b^2)}$$

więc $\begin{cases} k_1 = -b + ia \\ k_2 = -b - ia \end{cases}$ gdzie $i^2 = -1$

Przypadek I. Załóżmy, że $\frac{1}{pK} - \frac{R^2}{4p^2} < 0$

więc $a^2 < 0$

Jeżeli $R_0^2 = \frac{4p}{K}$ .... mamy $R > R_0$

Wówczas $a = \underline{i}\alpha$ gdzie $i^2 = -1$, $\underline{\alpha}$ rzeczywista

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = -b + \underline{i}a = -b - \alpha \\ k_2 = -b - \underline{i}a = -b + \alpha \end{array}\right\} \text{rzeczywiste}$$

$J = C_1 \varepsilon^{k_1 t} + C_2 \varepsilon^{k_2 t}$ jest "aperyodyczny"

$\alpha^2 = -a^2 = \frac{R^2}{4p^2} - \frac{1}{pK}$ (ma być >0) ; $\alpha^2 = \frac{1}{4p^2}(R^2 - R_0^2)$

więc $\alpha^2 < \frac{R^2}{4p^2}$

więc $\alpha^2 < b^2$ oraz $|\alpha| < |b|$

więc $\underline{k_1}$ i $\underline{k_2}$ są ujemne ($\underline{b}$ jest dodatnia)

J zmierza asymptotycznie do zera

$J_\infty = 0$

Przypadek II. Załóżmy $a^2 = 0$

$R = R_0$

Mamy $\frac{d^2 J}{dt^2} + 2b\frac{dJ}{dt} + b^2 J = 0$ ....(RR)

Załóżmy: $J = \varepsilon^{kt} f(t)$

$$\frac{dJ}{dt} = k\varepsilon^{kt} f(t) + \varepsilon^{kt}\frac{df(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2J}{dt^2} = k^2\varepsilon^{kt} f(t) + 2k\varepsilon^{kt}\frac{df(t)}{dt} + \varepsilon^{kt}\frac{d^2f(t)}{dt^2}$$

Wstawiając to wszystko do (RR)

$$(k^2 + 2bk + b^2) f(t) + 2(k+b) \frac{df(t)}{dt} + \frac{d^2f(t)}{dt^2} = 0$$

Żeby znaleźć k: $\quad k^2 + 2bk + b^2 = 0$

$$(k+b)^2 = 0$$

więc wówczas $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = 0$

t. j. $f(t) = A + Bt$

Rozwiązanie jest, ponieważ $k = -b$

$$J = (A + Bt)\, \varepsilon^{-bt}$$

Dla $t = \infty$ mamy znowu $J_\infty = 0$

Przypadek III. Przypuśćmy $a^2 > 0$

t. j. $R < R_0$

Wówczas $\left.\begin{matrix} k_1 = -b + ia \\ k_2 = -b - ia \end{matrix}\right\}$ są zespolone

$$J = C_1 \varepsilon^{-bt} \varepsilon^{iat} + C_2 \varepsilon^{-bt} \varepsilon^{-iat}$$

$$= \varepsilon^{-bt} \{ C_1 \varepsilon^{iat} + C_2 \varepsilon^{-iat} \}$$

$$= \varepsilon^{-bt} \{ (C_1 + C_2) \cos at + i (C_1 - C_2) \sin at \}$$

więc jest typu $\quad C \varepsilon^{-bt} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (at + D)$

Prąd J zmienia się peryodycznie

częstość $a = \frac{2\pi}{\tau}$, gdzie τ okres zmienności

$$\tau = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{pK} - \frac{R^2}{4p^2}}} = \frac{2\pi\sqrt{pK}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{4p^2} pK}}$$

$R_0^2 = \frac{4p}{K}$ $\quad$ zatem $\quad \tau = \frac{2\pi\sqrt{pK}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^2}}$ $\quad$ [gdzie $R < R_0$]

Wyładowanie jest "oscyllacyjne"
ale drgania są hamowane, tłumione, jak wskazuje czynnik ε^{-bt}

$b = \frac{R}{2p}$ zatem czas charakt-ny zanikania $\vartheta = \frac{2p}{R}$

amplitudy kolejnych drgań są coraz mniejsze

Przypadek szczególny (skrajny). Załóżmy $R = 0$
Należy oczywiście do przypadku III-go; oscyllacyjne

Mamy $a^2 = \frac{1}{pK}$

$b = 0$

Czynnik $\varepsilon^{-bt} = 1$; drgania nie są tłumione
nie zanikają

Okres drgań $\tau = 2\pi\sqrt{pK}$ .... ($\mathcal{K}$)

słynny wzór Lorda Kelvina na okres drgań, przy zaniedbaniu oporu i zanikania.

Wymiary: jak powiedzieliśmy poprzednio, spółcz. ind. p

$$\boxed{p_{12} = a^2\mu\int_{0'}\int_{0''}\frac{s(d0'.d0'')}{r_{12}}}$$

$[p] = [a^2\mu].L$ gdzie a stała Laplace'a, L wymiar długości

Pojemność K, jak łatwo sprawdzić*, jest wymiarów

$$[K] = [\varepsilon]L$$

zatem $[pK] = [a^2\mu\varepsilon].L^2$

Obszliśmy poprzednio: $[a^2\mu\varepsilon] = L^{-2}T^{+2}$

zatem $[pK] = T^{+2}$

jak być powinno wobec wzoru Lorda Kelvina ($\mathcal{K}$)

---

* Chociażby z formuły $K = \frac{\varepsilon S}{4\pi \cdot h}$ na pojemność płaskiego kondensatora, S pole, h odstęp liniowy

{ Po ogłoszeniu pracy Lorda Kelvina, różni badacze usiłowali ją sprawdzić doświadczalnie: Feddersen, Oettingen i inni (około 1862–1864 r.) Okresy τ w tych doświadczeniach były rzędu: 10^{-4} do 10^{-6} sek.

Henryk Hertz (1887–1891): τ do 10^{-9} sek. Zupełnie nowe genialne metody experymentalne. Idąc za teoryą Maxwella, stwierdził (po raz pierwszy, doświadczalnie) istnienie fal el-magnetycznych.

Prawie równocześnie: Sir Oliver Lodge w Anglii.

Później: Lebedeff: τ rzędu 10^{-11}, Arkadiewa ch. ch. (jeszcze krótsze)

Teorya Kelvina nie stosuje się już do tak szybkich oscylacyj, jest zbyt grubem przybliżeniem. }

9b

30

Określenie pracy: Love 123
Cox 142
AWW 212–213
–"– 214–215
Wstęp 111
* Cox 55–56 * – 57 * –

~~Przykłady: równia pochyła Sl. 162, 164~~
~~wahadło Sl. 166–167~~
~~planety~~
~~c. c. spadające, rzucone Sl. 165~~

Siła = $\frac{dW}{ds}$: Wstęp 113 Tait H. 15

Praca ogólniejsza niż siła Wstęp 114

Porówn. Newtona z Energetyką : Cox 142 *

~~Jednostki przy~~ ~~AWW 213~~

~~Wstęp 112~~

~~Cox 57~~

~~St. 156-~~

Shorebrook p. 148

log 0.622 = $\bar{1}$.79379

log 0.001293 = $\bar{3}$.11160

log 9.14 = 0.96095

log 273 = 2.43616

0.30250

5.33260

$\bar{6}$.96990

log 760 = 2.88081

log 283 = 2.45179

5.33260

0.000009330 gr/cm³

$\frac{9.33}{1.000.000}$ $\frac{gr}{cm^3}$

∴ 9.33 gr/m³

H^2O w 1 m³ pow

w 10° C

~~Praca jest skalarem AWW 215~~ *

~~Graficznie AWW 215-217~~
~~(Indykator) Ramsz 70~~
~~Glaz 180~~

88	0 81
45	1 79
33	2 60

$1 m^3 = 10^6 cm^3$

Przykłady: Wstęp 113 - 114 Bower 40-41
AWW 218
Cox 55, 147 - 148
* Cox 149

Energia Cox 143*
Planck 11 Glaz. 170

En. kinetyczna AWW 219-221

~~Wstęp 116~~

~~Cox 143-144 *~~

** {~~Cox 144-145~~
{~~Ilość ruchu i en. kinetyczna~~}

Planck 7

~~Pocisk armatni~~
~~Wagon powoli~~

Glaz 178-179
+ Glaz 182

~~M.....: Cox 149 **~~

Koło rozpędowe: Cox 150

m spółczynnik w en. kinetycznej

w 0° C.

log 0.622 = $\bar{1}$.793 79
log δ = $\bar{3}$.111 60
log 4.57 = 0.659 92

$\bar{3}$.565 31
2.880 81

$\bar{6}$.684 50

0.00000484

4.8 gr

En. potencyalna ~~AWW 225 – 227 – 229~~

~~Wstęp 115~~

~~Cox 145~~

~~Slaz 174 – 175~~

* ~~Tait II. 16~~

H_2O w 15°C

273,15

$$\log 0.622 = \bar{1}.79379$$
$$\log 8 = \bar{3}.11160$$
$$\log 12.67 = 1.10278$$
$$\log 273 = 2.43616$$

0.44433
5.34020
$\bar{5}.10413$

0.00001271 = 12.7 gr/m^3

$$\log 760 = 2.88081$$
$$\log 288 = 2.45939$$

5.34020

1 m^3 = 1000 litrów

Całkowita energia: Wstęp 116 – 117

Dynam. zasada zach. en.: Wstęp 117; 121

Maxw 89 Slaz 173

AWW. p. 119 (Tables)

Przykłady: Wstęp 128 – 129

0.0128 gr/litr

$\frac{1.28}{100}$ $\frac{\text{grama}}{\text{litr}}$ ~~więc~~ $1.28\ \frac{1000}{100} = 12.8$ gr/m^3

Układy raczowe(?) AWW 229
Wstęp 115; 120-121
Glaz 176

Siły centralne Wstęp 122

Perpetuum mobile 230 AWW 230
Wstęp 132-133
Planck 12

Zasada pracy wirtualnych AWW 232
Cox 57

Maching AWW 234

Dzielność   AWW 236 – 237
Wstęp 112
* Cox 152 HP
Tait 182

Zamiana pracy na ciepło : J eli
AWW 240
Wstęp 114 ; 134

Tarcie, dyssypacja, nieodwracalne

Cox 151

$$V_1 + V_2 = \underline{V} \quad (\text{dana})$$

$$M_1 + M_2 = \underline{M} \quad (\text{dana})$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= V_1 \rho_1(T) \\ M_2 &= V_2 \rho_2(T) \end{aligned}\right\} \underline{T} \text{ dane}$$

$V_1\ V_2\ M_1\ M_2$ 4 równania

$$V_1 + V_2 = V$$

$$V_1 \rho_1(T) + V_2 \rho_2(T) = M$$

$\underline{V}, \underline{M}, \underline{T}$ dane

Zasada ogólna zachowania energii

AWW 248 – 253

Wstęp 146–149 ; 151 – 154

Maxwell 92–93

Historya : Wbsp 135

Cox 143 – 144 *

Termin 01–02 p. 2 ; 31–32

Do dyskusji

1. wielkość (siły) – wartość (siły)

2. $\underline{\underline{\underline{v}}}$ cm/sek, $\underline{v}$ samo

3. uważać <u>za</u> (jako)

4. skrócenia:

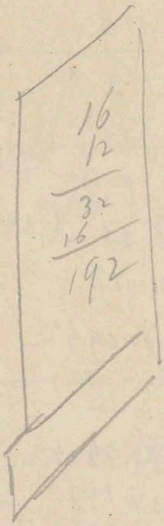
   gram
   miligram
   cm, sek, m, kg
   kilogramometr

5. szkowicz (p. 2)

6. wytyczają (Zarys p. 49) dotykają / nie dotyczą / spotykają

5. [illegible] – [illegible]

6. Тягар ≡ сила
Сила тяжіння



80
49
51
45
55
280
300.

gr
mgr
cm
sek
m
mm
kg

Ołów	0.031	Oliwa	0.31
Hg	0.033 ×	Nafta	0.45 ×
Ni	0.110	Alkohol etylowy	0.574 ×
Fe	0.113 ×	anilina	0,503
Szkło	(0.182) × (0,19) (0.200)	Ciepło właśc. Zabłs	
Porcelana	0.26		
Drewno	0.42		
Mosiądz	0.094		

4.0384214
2.7341274
1,3043140

0.093
2
0.186

5093
15
25465
5093
7639.5
3286
10925.5

509.3
32.86
542.16

$$100 \times 0.31 \times 100 + 20 \times 0.093 \times 100 =$$

$$= 500 \times 15 + 100 \times 0.093 \times 15$$

$$(100 \cdot 0.31 + 20 \times 0.093)(100 - T) =$$

$$= (500 + 100 \times 0.093)(T - 15)$$

$$(31 + 1.86)(100 - T) = (500 + 9.3)(T - 15)$$

$$32.86\,(100 - T) = 509.3\,(T - 15)$$

$$3286 + 7639.5 = T\,(509.3 + 32.86)$$

$$10925.5 = 542.16\,T$$

$$T = 20.15$$

300

$200 \times 0.113 \times \not{3}$ / ~~+~~ $1000 \times 15 + 100 \times 0.093$ × 15

0.226

$\frac{226}{1000}$ ~~100~~.300

6780 + 15000

9.3
15
465
93
139.5

$\frac{226}{1000}$ ~~100~~

15.000
6780
139.5
21919.5

1031.9

Kula żelazna
300° C

<u>Topienie się lodu</u> m_1 H_2O T_1 $(m_3 c_3)$
m_2 śniegu 0°
ostateczne T

$$m_1(T_1 - T) + m_3 c_3 (T_1 - T) = m_2 L + m_2 (T - 0)$$

$$m_1 T_1 + m_3 c_3 T_1 - m_2 L = (m_1 + m_3 c_3 + m_2) T$$

T

093 $\times 15 = (200 \times 0.113 + 1000 + 100 \times 0.093)$

1022.6
9.3
1031.9

9.3
15
465
93
139.5

1.3408307
3.0736376
1.3271931

21.29

75
8
600

1075
9.3
1084.3

$T_1 = 15$

np. $m_1 = 1000$ $m_3 = 100$ $c_3 = 0.093$

$m_2 =$ [redacted] 75 gr $L = 80$

c_3)

$$T = \frac{1000 \times 15 + 100 \times 0.093 \times 15 - 75 \times 80}{1000 + 100 \times 0.093 + 75}$$

$(T-0)$

$$= \frac{15000 + 139.5 - 6000}{1084.3} =$$

9000
139.5
8860.5

$m_2)T$

$$= \frac{8860.5}{1084.3} =$$

3.9474582
3.0351495
0.9123087

$= 8.171$

Drut stalowy (Witkowski I. pp. 308 i 314)

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{P}{S} \quad \text{(ib. p. 305)}$$

r drutu $= \frac{1}{2}$ mm $= 0.05$ cm

$S = \pi r^2 = 3.14 \times 0.0025\ \text{cm}^2$

$= 0.007850\ \text{cm}^2$

$P = 10$ Kg

$\varepsilon = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ (Spr. z Landolta pag. 43)

$$\frac{l}{L} = \frac{10\ \text{Kg}}{2.1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}\ 0.00785\ \text{cm}^2}$$

$$= \frac{1}{2.1 \times 10^5 \times 0.00785}$$

$\log 2.1 = 0.32222$ $-\bar{3}.21709$

$\log 0.00785 = \bar{3}.89487$ $\bar{4}.78291$

$\bar{2}.21709$ 0.0006066

3.21709

$$\frac{l}{L} = 0.0006$$

prawie 3 razy mniej niż granica sprężystości

$L = 2$ metry

$= 200$

$l = 200 \times 0.0006$

$$= \frac{2\cancel{00} \times 6}{10.0\cancel{00}} = \frac{12}{100} = 0.12 \text{ cm}$$

$= 1.2$ mm

Wytrzymałość 8000 Kg/cm² Hütte 317

Ja mam 10 Kg / 0.00785 cm² = 1274 Kg/cm²

$\log 0.00785 = \bar{3}.89487$

$\pm \bar{3}.89487$

2.10513

$3.10513 = \log 1274$.

$$\frac{10}{0.01} = \frac{10}{\frac{1}{100}} = 1000$$

Miedziany drut

Wtk. 1. 308

$r = 0.5 \text{ mm} = 0.05 \text{ cm}$

$\pi r^2 = 0.00785 \text{ cm}^2$

$E = 1.25 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$P = 10 \text{ Kg}$

$$\frac{l}{L} = \frac{l}{L} = \frac{10}{1.25 \times 10^6 \times 0.00785}$$

$\log 0.00785 = \bar{3}.89487$

$\log 1.25 \times 10^6 = 6.09691$

3.99178

1.00000

3.99178

$\bar{3}.00822$

$$\frac{l}{L} = 0.00102$$

$L = 200 \text{ cm}$

$l = \frac{1}{1000} 200$

$= \frac{2}{10} \text{ cm}$

$= 2 \text{ mm}$

już przekracza granice sprężystości (Wtk. 1. 314)

Drut ołowiany

$r = 0.05$ cm

$S = \pi r^2 = 0.00785$ cm²

$E = 180 . 10^3$ Kg/cm² $= 0.18 \times 10^6$ Kg/cm²

$$\frac{l}{L} = \frac{10 \text{ Kg}}{0.18 \times 10^6 \times 0.00785}$$

$\log 0.00785 = \bar{3}.89487$

$\log 0.18 \times 10^6 = 5.25527$

3.15014

1.00000

3.15014

$\bar{3}.84986$

$\frac{l}{L} = 0.00708$

$L = 200$ cm

$l = \frac{7}{1000} 200 = \frac{14}{10}$ cm

$= 14$ mm

to jest 5 razy więcej
niż gran. spręż.
(Tech. 1.374)

Wytrzymałość :

Cu : 3000 Kg/cm² (rozrywanie) Witk. 317

$$\frac{10 \text{ Kg}}{0.00785 \text{ cm}^2}$$

$\bar{3}.89497$ w mian.

2.10503 w licz

3.10503

1274 Kg/cm²

Pb : 200 Kg/cm²

$D = 0.001293 \text{ gr/cm}^3$

$D = \frac{M}{V}$; $V = \frac{M}{D}$

1 m = 100 cm

$$V(1kg) = \frac{~~1 kg~~ \; 1000 \text{ gr}}{0.001293 \text{ gr/cm}^3}$$

log 7.51 = 0.87564

log 0.001293 = $\bar{3}.11160$

$\bar{3}.98724$

0.98724

1 m³ — 0.0092 kg = 9.2 grama

$1000 \times 15 - 1075 \times 8.17 = 75$ L

1075	15000	75
817	8782.75	82.8
7525	6217.25	
1075	6000	
8600	217	
8782.75	150	
	67	

Land. B. p 126

10° 760 mm

7.51 gr na kg powietrza

7.51 gr na $\frac{1000 \text{ gr}}{0.001293 \text{ gr/cm}^3}$

7.51 gr na $\left(\frac{1000}{0.001293}\right)\text{cm}^3$

$\frac{7.51 \times 0.001293}{~~1000~~} \cdot 1000$ gr na 1 m^3

9.71 gr na 1 m³

H^2O w pow.

$2.5°C$ .... 5 min

$1°C$ .... 2 minuty

$\frac{1}{2}°C$ .... 1 minuty .... $\frac{1}{2}$ kal. na 1 gram

$\frac{160}{2}°C$ .... 160 minut

$= 80°C$ .... 80 kal. na 1 gr

80 $\qquad 2.5 \times 32 = 64 + 16 = 80$ dobre

$m_1 = 1000 \qquad c_1 = 1$

$m_3 = 200 \qquad c_3 = 0.093$

$T_1 = 15°C \qquad R = 538$ Tablice

$m_2 = 20 \qquad c_1 = c_2 = 1$

$$(m_1 + m_3 c_3)(T - T_1) = m_2 [R + 100 - T]$$

$$(m_1 + m_3 c_3 + m_2)T = (m_1 + m_3 c_3) T_1 + m_2(R + 100)$$

$$T = \frac{(m_1 + m_3 c_3) T_1 + m_2 (R + 100)}{m_1 + m_3 c_3 + m_2}$$

$$T = \frac{(1000 + 18.6)15 + 20 . 638}{1000 + 18.6 + 20}$$

~~$\frac{15279 + 31900}{1068.6} = \frac{47179}{1068.6}$~~

$$= \frac{15279 + 12760}{1038.6} = \frac{28039}{1038.6}$$

$$= 26.997\ ^\circ C.$$

$\log 28039 = 4.4477625$
$\log 1038.6 = 3.0164483$
1.4313142

26.997

638
20
12760

15279
12760
28039

0.093
0.18|6
18.6

~~638~~
~~50~~
~~31900~~
~~15279~~
~~47179~~

1018.6
15
50930
10186
15279.0

Odwrotnie $T = 27$

$$\frac{(m_1 + m_3 c_3)(T - T_1)}{m_2} = R + 100 - T$$

$$\frac{1018.6 \times 12}{20} = R + 73$$

$\frac{2}{19}50$

$$\frac{12223.2}{20} = R + 73$$

1018.6
12
2037.2
10186
12223.2 : 20
120
22
23
320
20
120

611.16

$R = 611.16 - 73$

$R = 538$

611.16
73
538

.19
50
9,50

$m_3 = 50$

$c_3 = 0.19$

$$T = \frac{(m_1 + m_3 c_3 + m_4 c_4)T_1 + m_2(R + 100)}{m_1 + m_3 c_3 + m_4 c_4 + m_2}$$

$m_1 = 1000$
$m_3 c_3 = 18.6$
$m_4 c_4 = 9.5$
1028.1

$$\begin{array}{r} 1028.1 \\ 15 \\ \hline 51405 \\ 10281 \\ \hline 15421.5 \end{array}$$

$(m_1 + m_3 c_3 + m_4 c_4) T_1 = 15421.5$
$m_2 (R + 100) = 12760$
28181.5

$$T = \frac{28181.5}{1048.1}$$

$$\begin{array}{r} \text{~~10281~~} \\ \text{~~20~~} \\ \hline \text{~~10301~~} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1028.1 \\ 20 \\ \hline 1048.1 \end{array}$$

$l\,28181.5 = 4.4499642$
$l\,1048.1 = 3.0204027$
1.4295615

$$\begin{array}{r} 9564 \\ 78 \\ \hline 9642 \end{array}$$

26.8883

26.9° C

Joule pag. 310 – 312

I) podn. się temp. 0·563209°F =

= 0.563209 $\frac{5}{9}$ = $\frac{0.2816045}{9}$

= 0·312896 °C

0·3104°C

II) Capacity kalorymetru.

7000 grains = 453·59243 gramy

log 453·59243 = 2·6566658
log 7000 = 3.8450980

$\bar{1}$·8115678

Woda : 4. 9695543
$\bar{1}$. 8115678

3. 7811221 — 6041·2

Miedź 3. 3856420
$\bar{1}$. 8115678

2·1972098 — 157·475

Mosiądz 3. 2577506
$\bar{1}$. 8115678

2. 0693184 — 117·30

6041.2
157.5
117.3

6316.0 gr Σmc

$\log 6316 = 3.8004421$

$\log 0.~~312896~~ = \bar{1}.49192$
0.3104

3.29236 | 3.29236

$Q =$ ~~1976.25 kal~~
$= 1960.5$ kal.

Praca W

$\log 403315 = 5.6056444$
$\bar{2}.8115678$

4.4172122

$P = 26134.4$ gramów

$h = 1260.096$ inch

36 inch = 0.914399 m = 91.4399 cm

1 inch = 2.54 cm

Wodór	Węgiel
Powietrze	Cukier
	Piasek
Korek	cegła 2.1
Drewno	porcelana 2.3
Papier (alkohol)	gips 2.3
~~Oliwa~~ Nafta	marmur 2.6
Oliwa	szkło 2.5 – 4.7
Masło	glin 2.58
Lód	dyjam 3.5
Woda	cynk 7.2
Mleko	żelazo 7.8
	ni 8.7
	cu 8.9
	Hg 13.56
	Au 19.3
	Pt 21.5

5–6 kgm/sek

Rozdz. III. pp. 38–40

M ziemi = 5.9973×10^{27} gr

$\times$ 0.012 żeby otrzymać $\underline{m}$ księżyca

12.10^{-3}

$$\begin{array}{r} 5.9973 \\ 12 \\ \hline 119946 \\ 59973 \\ \hline 71.9676 \end{array}$$

$\underline{m}$ księżyca = 71.9676×10^{24} gr

= 71.97

$\lg 1260.096 = 3.1003705$
$\lg 2.54 = 0.4048337$

$$\overline{3.5052042}$$

$h = 3200.4$ cm

$\frac{h}{20} = 160.02$ cm

Wodór 0.0000899

0..0000904 Rayleigh r LB 223

~~0.12932~~
~~9~~
~~1.16388~~

~~5661~~

12932
13
38796
77592
914716

Praca W = 20 mgh

$g = 980 \cdot 617 \times 1 \cdot 00075$

2 · 9914994
0003256
2 · 9918250

$g = 981 \cdot 35$

~~lg 8.2081 × 10^10 = 10 · 9142414~~
~~lg 1976 · 25 = 3. 295 8422~~
~~7. 6183992~~

~~4.1 534 × 10^7~~

~~lg 20 = 1.3010300~~

$\lg m = 4.4172122$

$\lg g = 2.9918250$

$\lg (20h) = 3.5052042$

10.9142414

$W = 8.2081 \times 10^{10}$ ergów

$J = \dfrac{8.2081 \times 10^{10}}{~~1976.25~~ \; 1960.5} = ~~4.1531 \times 10^{7}~~$

$= 4.1868 \times 10^{7}$

Joule zam. 6050.186 = W'

brane 6067.114 = W'' p. 312

6067 6050
6050 1.003
17000

$\lg 8.2081 \times 10^{10} = 10.91424$

$\lg 1960.5 = 3.29236$

7.62188

4.1868×10^{7}

<u>Hg</u> 15° C

$D = 13.55849$

$= 13.559$

$= 13.56$

~~[illegible]~~ $D = \frac{M}{V}$

$V = 100\ cm^3$ $13.559 \times 100 =$

$= 1355.9$ gr

$$\begin{array}{r} 7.8 \\ 6 \\ \hline 46.8 \end{array}$$

$m = 26134.4$ gr

$g = 981.35$

$h = 161.43$ cm

$$\begin{array}{r} 10.91805 \\ 3.29584 \\ \hline 7.62221 \end{array}$$

$7.62221 = \mathfrak{h}\,(4.19 \times 10^7)$

Powietrze (L. i B. pp. 13–14)

0° 760 :	0.001293
15° 760	0.001225
20° 760	0.001204

suche

Wodór 0°, 760

Ostateczne (fikc.) obliczenie W

$$W = 20\ mgh$$

$$\log m = 4.41721$$
$$\log g = 2.99183$$
$$\log 20 = 1.30103$$
$$\log h = 2.20798$$

$$10.91805 = \log W$$

$$W = 8.2804 \times 10^{10} \text{ ergów}$$

$$J = \frac{8.2804 \times 10^{10}}{1976.25} = 4.19 \times 10^{7}$$

Niagara Cox p. 154 (No 16)

1 stopa ang. = 30·4795 cm

1·4840070
3

4·4520210

900
27000

28315·3 cm^3 = 1 cub. feet

28315·3

1000,000

20.000 $\frac{2}{100}$

= 0.028315 m^3

270.000 $\frac{2}{100}$

log 270.000 = 5.4313638
$\bar{2}$.4520210

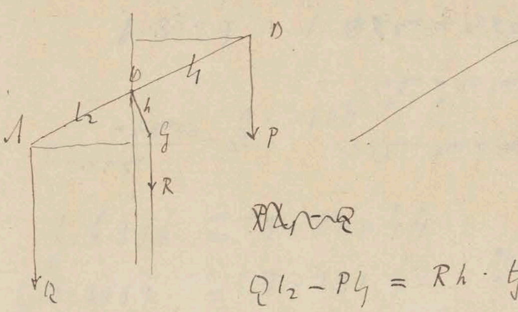
3.8833848

7645 m^3 na sekundę

log 161 = 2.20683
$\bar{1}$.48401

1.69084

49.07



~~XX~~

$$Q l_2 - P l_1 = R h \cdot \operatorname{tg} \theta'$$

$$P l_2 - Q l_1 = R h \operatorname{tg} \theta''$$

$$\frac{Q l_2 - P l_1}{P l_2 - Q l_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta'}{\operatorname{tg} \theta''} = \varepsilon \qquad \frac{l_1}{l_2} = x$$

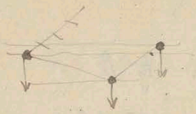
$$\frac{Q - P x'}{P - Q x} = \varepsilon$$

$m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + m_3 g z_3$

$g(m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3)$

$g\,(m_1 + m_2 + m_3)\,z_c$ $\quad z_c = \dfrac{m_1 z_1 + \text{——}}{m_1 + m_2 + m_3}$

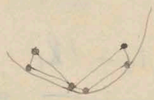
$m_1 = m_2 = m_3$



$z_c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$

Mgz_c

$W = Mgz_c$



~~$U = U_0 + Mgz_c$~~

~~$T_R + U_R = T + U = \text{const.}$~~

~~$T_R = 0$ spoczynek~~ ~~$U_R = \max.$~~

~~U~~

~~[illegible] U_0 U~~

$U_R = \text{minimum}$



$U_R = \text{minimum}$

$U > U_R$

$T + U = T_R + U_R$

$T = U_R - U$ $\quad U_R = \text{Minim}$

więc T jest < 0

co niemożliwe

$U_R = \text{Min.} \therefore (z_c)_R = \text{Minim}$

$0.3129 : 1.008 =$

$= 0.3104\,^{\circ}C$

$\log 6316 = 3.80044$

$\log 0.3104 = \bar{1}.49192$

3.29236

$Q = 1960.5$



$$mgz = W = U_M - U_0$$

$$U_M = U_0 + mgz$$

M spada, od A do O ; A (z=h)

w A : $t=0$, $v=0$

$$v^2 = 2gs = 2g(h-z)$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg(h-z)$$

$$U_M = U_0 + mgz$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + U_M = mgh + U_0$$

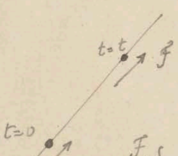
$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_A$ tam $v=0$

$U_A = mgh + U_0$

$= \mathcal{E}_0$ tam $v_0^2 = 2gh$

$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = mgh$

$U_0 = U_0$



$$F.s = U_0 - U$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = U_0 - U$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + U = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + U_0$$

15 gr × 50000 cm/sek $5 \cdot 10^4$

$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 25 \cdot 10^8$

187.5×10^8 ergów

18.75×10^9

1.875×10^{10}

$= 187.5 \times 10$ joulów

$= 1875$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 25 \\ \hline 75 \\ 30 \\ \hline 375 \\ 187.5 \end{array}$$

$\cos(180° - \varphi) = \cos 180 \cos\varphi + \sin 180 \sin\varphi$

$= -\cos\varphi$

$U_N > U_M$

$W_1 = U_M - U_N$

$W_2 = U_N - U_M$

$-W_1 = U_N - U_M$

$W_2 = U_N - U_M$

Pociąg $m = 400$ ton $= 400 \cdot 10^6$ gr $= 4 \cdot 10^8$ gr

$v = 3$ cm/sek

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^8 \cdot 9 = 18 \cdot 10^8$ ergów $= 18 \times 10^8$ erg

$m v = 4 \cdot 10^8 \cdot 3 = 12 \cdot 10^8$ gr.cm/sek

Kula $m = 20$ gr

$v = 800$ cm/sek

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 640000 = 1280.0000 = 12.8 \times 10^6$

$m v = 20 \cdot 500 = 10^3$

Pociąg $m = 250$ ton $= 2.5 \times 10^8$

$v = 1$ cm/sek

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{2.5}{2} \times 10^8 = 1.25 \times 10^8$ ergów

$m v = 2.5 \times 10^8 \times 1 = 2.5 \times 10^8$ gr cm/sek

Kula $m = 20$ gr

$v = 500$ m/sek $= 5 \cdot 10^4$ cm/sek

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 \cdot 10^8 = 250 \cdot 10^8$ ergów

$m v = 20 \cdot 5 \cdot 10^4 = 10^6$ gr cm/sek

$$F = mf = m\frac{v - v_0}{t}$$

$$F \cdot t = mv - mv_0$$

$$F \cdot s = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$1600 \cdot \frac{3}{10}$ m   25
25

$\frac{4800}{10} = 480$ m

64
20
1280

P $m = 400$ ton $= 4 \times 10^8$
$v = 1$ cm/sek

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^8 \cdot 1 = 2 \times 10^8$ erg

$mv = 4 \cdot 10^8$ gr cm/sek

K $m = 10$ gr
$v = 400$ m/sek $= 4 \cdot 10^4$ cm/sek

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 16 \cdot 10^8 = 8 \times 10^9$ ergów

$mv = 10 \cdot 4 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^5$

1 stopa ang. = 30.5 cm = 30.479 cm

1 funt ang = 0.4536 kg = 0,30479 m

lg 0.304795 = 1̄.4840075

lg 0.45359 = 1̄.6566635

lg 33.000 = 4.5185139

3.6591849

lg 60 = 1.77815

1.88103

76.03

1 lb. = 0.45359 kg.

1 foot = 0.304795 m

1̄.4840075

1̄.6566635

1̄.1406710 na minutę

1.77815

3̄.36252 na sekundę

$$\frac{1\ \text{lb}\ 1\ \text{foot}}{1\ \text{min.}} = 0.002304\ \text{kgmm/sek}$$

.0023
33.000
69
69
75,9000

Raising own body 3.62839
$\bar{3}.36252$
0.99091

9.793 Kgmm/sek

Turning a handle 3.41497
$\bar{3}.36252$
0.77749

około 6 Kgmm/sek

Rowing od 9 do 12 kgmm/sek

Working a tricycle około 5 kgmm/sek

---

s

$v = \sqrt{2gs}$ $v = gt$

$F = mg$

$\delta = mgv = Fv = mg\sqrt{2gs}$

Np. $m = 1$ kg

$g = 981$

$s = 1$ m

$\log 2 = 0.30103$
$\log g = 2.99167$
$\log s = 2$

5.29270

$v = 442.95$

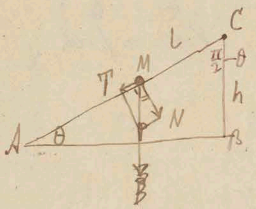
$m = 1000$

$\log v = 2.64635$
$\log F = 5.99167$
$\log \delta = 8.63802$

$\delta = 4.3453 \times 10^8 \frac{erg}{sek} =$

Cegła = 10 X 25 X 5 X 2

= 100 X 25 = 2500 gramów



$MT = MP \cdot \sin\theta$

$l = \frac{h}{\sin\theta}$

$MT \cdot l = p \cdot \sin\theta \frac{h}{\sin\theta} = ph$

---

1 lb = 453.6 gr { Glazebrook p. 160
Cox p. 118 }

Tona = 10^3 kg

Tarcie = siła 16 lb. per tonę

= siła ciężar 7257.6 gramów

= 7 Kg na tonę

453.6
16
27216
4536
7257.6

---

m młotka = 500 gr = ½ kg

wywieramy siłę 6 Kg   7 kg.g

Razem 6½ Kg   7

o wysokości ½ metra

Praca $\frac{13}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{4}$ Kgm metra

Gwóźdź wjeżdża w deskę o ½ cm = $\frac{1}{200}$ metra

$$\therefore \text{Opór } R = \frac{\frac{13}{4}\ \text{Kgmm}}{\frac{1}{200}\ \text{m}} = \frac{13 \times 200}{4}\ \text{Kg}$$

$$= 13 \times 50 = 650\ \text{Kg}$$

$$6\ 1/2\ \text{Kg}$$

---

człowiek 5 Kgmm / sek
koń 50 kgmm / sek

$$\frac{3}{30.000} = \frac{1}{10.000} = \frac{\text{człowiek}}{\text{Lokomotywa}}$$

~~3h~~ 1 minuta = 60 sekund
1 godzina = 3600 sekund
3 godziny = 10800 sekund

$$\frac{\text{człowiek } 60 \text{ minut}}{\text{koń } 5 \text{ minut}} = 12 \text{ razy}$$

$$\frac{3600}{\frac{1}{2}\ \text{sek}} = 7200$$

Kula armatnia 50 kg

$v = 10\ m/sek$

Glazebrook p. 182

Przezwyciężanie oporu

Opór *jest* – III prawo

ale co znaczy „przezwyciężać"?

Być *równe*!

Czemu to każdy powtarza przy pracy

a nie w Dynamice ?

30·4795
  32

609590
914385

9753445
  60959

9824

981   322
966   3046

1500
1288

2120

0·9144 : 3

0·3048